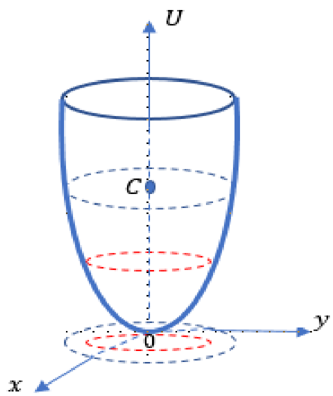
САБАҚ № 15

Бұл сабақта скалярлық өрістерді, деңгей сызықтары мен деңгей беттерін, бағыт бойынша туынды мен градиентті қарастырамыз.

Әр M нүктесі скалярлық физикалық $U = U(M)$ шамамен байланысқан жазықтықтағы немесе кеңістіктегі облысты *скалярлық өріс* деп айтады. Скалярлық өрістің берілуі скалярлық $U = U(x, y)$ немесе $U = U(x, y, z)$ функцияның берілуімен бірдей.

Скалярлық өрістің геометриялық сипаты: *деңгей сызықтары* немесе *деңгей беттері*.

Жаттығу 1*.* $U(x, y) = x^2 + y^2$ *скалярлық өрістің деңгей сызықтарын анықтаңыз.*



Шешуі. Скалярлық өрістің деңгей сызықтары $U(x, y) = C$ теңдеуімен табылады, C -*const.*

Демек, $x^2 + y^2 = C,\ C \geq 0$. Берілген скалярлық өрістің деңгей сызықтары – концентрлі шеңберлер. $C = 0$ болса, $(0; 0)$ нүктені аламыз.

Жаттығу 2*.* $U = xy$ *скалярлық өрістің* $(2; 1), (1; 2)$ *және* $(4; 0.5)$ *нүктелердегі градиентін табыңыз және геометриялық кескінін салыңыз.*

Шешуі. Скалярлық өрістің $\vec{l} = (l_x, l_y, l_z)$ бағыттағы туындысы

$$\frac{\partial U}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial U}{\partial x} cos\alpha + \frac{\partial U}{\partial y} cos\beta + \frac{\partial U}{\partial z} cos\gamma$$

формуламен есептеледі, мұнда

$$cos\alpha = \frac{l_x}{|l|},\ \ cos\beta = \frac{l_y}{|l|},\ \ cos\gamma = \frac{l_z}{|l|},\qquad |\vec{l}| = \sqrt{(l_x)^2 + (l_y)^2 + (l_z)^2}.$$

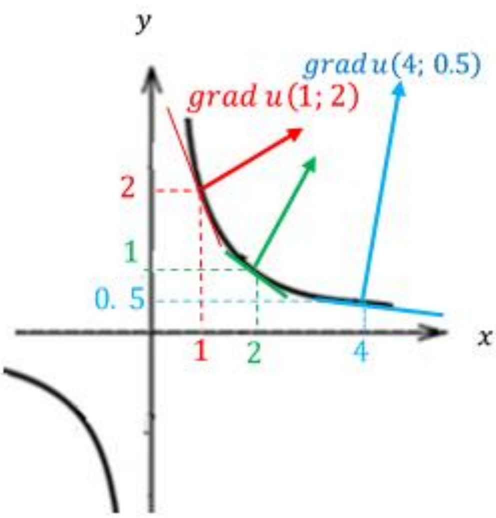
$\left|\frac{\partial U}{\partial \vec{l}}\right|$ шамасы скалярлық өрістің M нүктесіндегі өзгеру жылдамдығын көрсетеді, $\frac{\partial U}{\partial \vec{l}}$ – ң таңбасы функцияның $\vec{l}$ бағыттағы өсу, кемуін білдіреді.

$\left(\left.\frac{\partial U}{\partial x}\right|_M ; \left.\frac{\partial U}{\partial y}\right|_M ; \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_M\right)$ векторын $U = U(x, y, z)$ функцияның M нүктесіндегі *градиенті* деп айтады.

$$grad\ U = \frac{\partial U}{\partial x}\vec{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\vec{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\vec{k}$$

$U = U(x, y) = xy$ үшін $grad\ U = y\vec{\imath} + x\vec{\jmath}$.

$grad\ U|_{(2;1)} = \vec{\imath} + 2\vec{\jmath}$, $\quad grad\ U|_{(1;2)} = 2\vec{\imath} + \vec{\jmath}$, $\quad grad\ U|_{(4;0.5)} = 0.5\vec{\imath} + 4\vec{\jmath}$



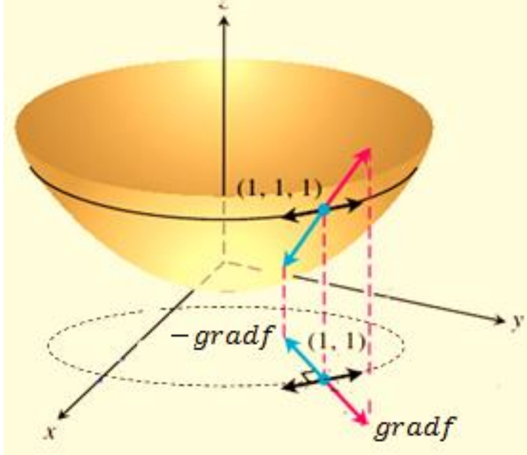
Геометриялық кескіні:

$U = xy$ скалярлық өрістің деңгей сызықтарын жүргізейік. Ол үшін $xy = C$ теңдеуден $y = \frac{C}{x}$ гиперболалардың жиынтығын және $x = 0$, $y = 0$ түзулерін саламыз. C- кез келген тұрақты. Берілген нүктелердің ұшынан бастап $gradU$ векторын саламыз.

Суретте $C > 0$ үшін деңгей сызықтары жүргізілген және көрініп тұрғандай берілген нүктелердегі $grad\ U$ осы нүктелердегі деңгей сызықтарына перпендикуляр болады.

Жаттығу 3. $f(x, y) = \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$ *функцияның* $(1; 1)$ *нүктедегі ең үлкен, ең кіші және нөлдік өзгерістерінің бағытын анықтаңыз.*

Шешуі. Градиенттің бағыты M нүктесінен өтетін деңгей беті нормалінің бағытымен бағыттас және



$U = U(x, y, z)$ скалярлық өрістің әртүрлі бағытта алынған барлық туындыларының арасында ең үлкен мәнді градиенттің бағыты бойынша алған туынды иемденеді:

$$max\left|\left.\frac{\partial U}{\partial \vec{l}}\right|_M\right| = |(grad\ U)_M|$$

$f(x,y)$ функциясы $(1;1)$ нүктеде градиенттің бағытымен тез өседі

$$grad\, f|_{(1;1)} = (x\vec{\imath} + y\vec{\jmath})|_{(1;1)} = \vec{\imath} + \vec{\jmath}$$

және оның осы бағытта өсу жылдамдығы

$$\left|grad\, f|_{(1;1)}\right| = |\vec{\imath} + \vec{\jmath}| = \sqrt{2},$$

бағыт $\vec{l} = \frac{\vec{\imath}+\vec{\jmath}}{|\vec{\imath}+\vec{\jmath}|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$ бірлік вектормен сипатталады (суретте қызыл түс).

Функцияның ең баяу өзгерісінің бағыты

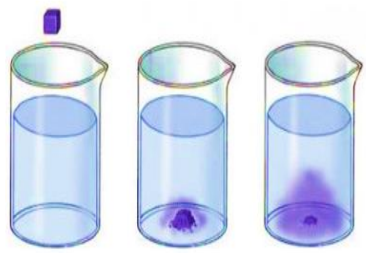
$$-grad\, f|_{(1;1)} = -\vec{\imath} - \vec{\jmath}$$

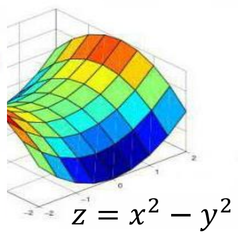
Оған сәйкес бірлік вектор

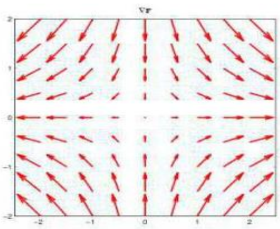
$$-\vec{l} = \frac{-\vec{\imath} - \vec{\jmath}}{|\vec{\imath} + \vec{\jmath}|} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$$

(суретте көк түс). Функцияның нөлдік өзгерісінің, яғни $gradf|_{(1;1)}$ -ке перпендикулярлардың бағыттары

$\vec{l} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$ және $-\vec{l} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{\jmath}$ (суретте қара түс).







түстердің градиенті ***физикадағы градиент*** ***геометриядағы градиент***

Қорытынды:

- $(grad\, U)_M \perp$ жанамаға (жанама жазықтыққа), деңгей сызығындағы (деңгей бетіндегі) M нүктеден өтетін;
- $|(grad\, U)_M|$ - U функцияның өзгеру шамасы;
- $(grad\, U)_M$ - U функцияның M нүктеден бастап өсу (жоғары көтерілу) бағыты;

- $-(grad\, U)_M$ - U функцияның M нүктеден бастап кему (төмендеу) бағыты;
- U скалярлық өрістің әртүрлі бағытта алынған барлық туындыларының арасында ең үлкен мәнді градиенттің бағыты бойынша алған туынды иемденеді: $max \left| \frac{\partial U}{\partial \vec{l}} \Big|_M \right| = |(grad\, U)_M|$
- M- U функцияның экстремум нүктесі болса, $(grad\, U)_M = 0$.

Тапсырмалар

1. $U(x,y) = x^2 - y^2$ скалярлық өрістің деңгей сызықтарын анықтаңыз.
2. $U = x^2 + y^2$ скалярлық өрістің $(2;1), (1;2)$ және $(4;0.5)$ нүктелердегі градиентін табыңыз және геометриялық кескінін салыңыз.
3. $U = xyz$ скалярлық өрістің $\vec{l} = (3;-4;2)$ бағыттағы туындысын табыңыз.
4. $U = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ скалярлық өрістің градиенті $Oxyz$ кеңістіктің қай нүктелерінде
   a) Oz өсіне перпендикуляр;
   b) Oz өсіне параллель;
   c) нөлге тең болады?
5. $U = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$ скалярлық өрістің градиентін $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ $(a > 0, h > 0)$ шеңбер бойымен Стокс формуласын пайдаланып интегралдаңыз.
6. $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ болса, $grad\, U(r) =?$
7. $U = U(x,y,z)$ функция үшін $grad\, U$
   a) цилиндрлік координаттар;
   b) сфералық координаттар арқылы қалай жазылады?
8. $U(x,y,z), V(x,y,z)$ - скалярлық өрістер, α, β - тұрақтылар берілсе, төмендегі теңдіктерді дәлелдеңіз:
   a) $grad\, (\alpha U + \beta V) = \alpha\, grad\, U + \beta\, grad\, V$
   b) $grad\, (U \cdot V) = V\, grad\, U + U\, grad\, V$